MATEMATICA - LEZIONE 45

mercoledì 7 gennaio 2026 09:04

Cosa significa sommare infiniti numeri?

- $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$
  $= 0,33333\ldots$
  $= 0,3 + 0,03 + 0,003 + \ldots$

- $\pi = 3,14\ldots$
  $= 3 + 0,1 + 0,04 + \ldots$

Successioni di numeri reali

Def: Una **SUCCESSIONE** è una funzione di dominio $\mathbb{N}$ (o un insieme del tipo $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$) e codominio $\mathbb{R}$.

Notazione: Una successione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ si indica con $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Nel caso in cui $a : A \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ con $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$ si scrive $\{a_n\}_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq n_0}}$ o $\{a_n\}_{n \geq n_0}$.

ESEMPI

- $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n = n^2$
  $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $\ldots$

- $\{a_n\}_{n \geq 1}$ con $a_n = \frac{1}{n}$
  $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $\ldots$

OSS

Le successioni sono definite su $A = \mathbb{N}$ o $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$
In entrambi i casi $D_r(A) = \{+\infty\}$. Quindi di una successione si possono calcolare i limiti (solo) per $n \to +\infty$ utilizzando le stesse regole che abbiamo visto per le funzioni:

- $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0.$
- $\lim_{n \to +\infty} \frac{3n^2 - 1}{2n^2 + n + 1} = \frac{3}{2}$
- $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$
- $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \to +\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} e^{\ln(n^{\frac{1}{n}})}$
$$= \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$
- $\nexists \lim_{n \to +\infty} \sin n$
- $\nexists \lim_{n \to +\infty} (-1)^n$ $\qquad (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$

Serie.

Def. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0}$ una successione di numeri reali con $n_0 \in \mathbb{N}$. Sia $M \in \mathbb{N}$, $M \geq n_0$. Definiamo SOMMA PARZIALE M-ESIMA DI $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0}$ CON INDICE INIZIALE n_0 la quantità

$$S_M := \sum_{n=n_0}^{M} a_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots + a_M.$$

La successione $\{S_M\}_{\substack{M\in\mathbb{N}\\ M\geq n_0}}$ è detta SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI di $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ con indice iniziale n_0.

Si definisce SERIE DI TERMINI $\{a_n\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq n_0}}$ E INDICE INIZIALE n_0 la quantità:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n := \lim_{M\to+\infty} S_M = \lim_{M\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{M} a_n .$$

<u>Def</u> (Carattere di una serie)

Una serie può essere:

- CONVERGENTE se $\exists \lim\limits_{M\to+\infty} S_M = S \in \mathbb{R}$. In tal caso si scrive che $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n = S$.
- DIVERGENTE A $+\infty$ se $\exists \lim\limits_{M\to+\infty} S_M = +\infty$ $\left(\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n = +\infty\right)$
(DIVERGENTE POSITIVAMENTE)
- DIVERGENTE A $-\infty$ se $\exists \lim\limits_{M\to+\infty} S_M = -\infty$ $\left(\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n = -\infty\right)$
(o DIVERGENTE NEGATIVAMENTE)
- INDETERMINATA se $\nexists \lim\limits_{M\to+\infty} S_M$.

ESEMPI

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ (cioè $a_n = 1$ $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 1$).

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \lim_{M\to+\infty} \sum_{n=1}^{M} 1 = \lim_{M\to+\infty} M = +\infty .$$

La serie diverge a $+\infty$.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (SERIE DI MENGOLI)

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

$\vdots$

$$S_M = 1 - \frac{1}{M+1}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{M\to+\infty} S_M = \lim_{M\to+\infty} 1 - \frac{1}{M+1} = 1$$

La serie converge e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Serie Telescopiche

Def Si dice che una serie $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è TELESCOPICA se $\exists \{b_n\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq n_0}}$ tale che $a_n = b_n - b_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Come nell'esempio precedente, per una serie telescopica:

$$S_M = \sum_{n=n_0}^{M} (b_n - b_{n+1})$$

$$= b_{n_0} - \cancel{b_{n_0+1}} + \cancel{b_{n_0+1}} - \cancel{b_{n_0+2}} + \cancel{\ } - \dots + \cancel{\ } + \cancel{b_M} - b_{M+1}$$

$$= b_{n_0} - b_{M+1}$$

ESEMPIO:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln n - \ln(n+1)$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \sum_{n=1}^{M} \ln n - \ln(n+1)$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \ln 1 - \ln(M+1)$$

$$= \lim_{M \to +\infty} - \ln(M+1) = -\infty$$

La serie diverge a $-\infty$.

OSS

$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ dipende da n_0, ma il carattere della serie (cioè la convergenza / divergenza) no.

Cioè se $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_0$, allora:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=n_1}^{\infty} a_n \text{ converge}.$$

Inoltre $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n - \sum_{n=n_0}^{n_1-1} a_n$ (se $n_1 > n_0$)

Serie geometrica (di ragione $x \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots$$

- Se $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$$

• Se $x \neq 1$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} x^n = \lim_{M \to +\infty} S_M \qquad S_M = \sum_{n=0}^{M} x^n$$

$$\begin{aligned}(1-x) S_M &= (1-x) \sum_{n=0}^{M} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{M} (1-x) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{M} x^n - x^{n+1} \\ &= x^0 - x^{M+1} = 1 - x^{M+1}\end{aligned}$$

$(1-x) S_M = 1 - x^{M+1}$ da cui

$$S_M = \frac{1 - x^{M+1}}{1-x}$$

Ricordiamo che $\lim_{M \to +\infty} x^{M+1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \nexists & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$

Conclusione :

$$\lim_{M \to +\infty} S_M = \lim_{M \to +\infty} \frac{1 - x^{M+1}}{1-x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \nexists & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

Quindi possiamo dire che la serie

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ è :

se $x \geq 1$ è divergente a $+\infty$

se $-1 < x <$ è convergente a $\frac{1}{1-x}$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \right)$$

se $x \leq -1$ è indeterminata.

ESEMPI

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ è una serie geometrica di ragione $x = \frac{1}{2} \in]-1,1[$.

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

- $0,\overline{3} = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \ldots\ldots$

$$0,3 = \frac{3}{10} \qquad 0,03 = \frac{3}{10^2} \qquad 0,003 = \frac{3}{10^3}$$

$$0,\overline{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

$$= 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} - 1\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right)$$

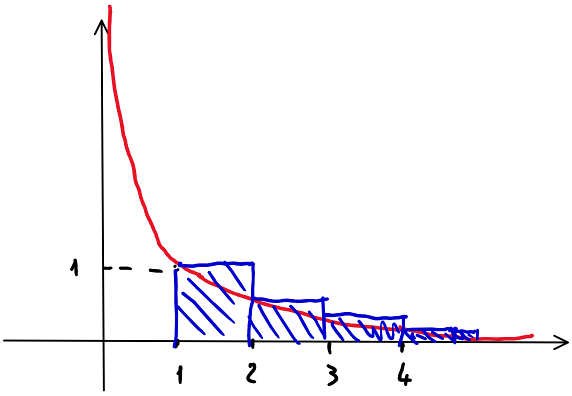
$$= 3\left(\frac{10}{9} - 1\right) = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots$$

è divergente a $+\infty$.

Idea: Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$



$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è la somma delle aree dei rettangoli di base $[n, n+1]$ e altezza $\frac{1}{n}$ quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty .$$

Più precisamente, $\forall M \in \mathbb{N},\ M \geq 1$:

$$\int_1^{M+1} \frac{1}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{M} \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \sum_{n=1}^{M} \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\, dx$$

$$= \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} = S_M$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{M \to +\infty} S_M \geq \lim_{M \to +\infty} \int_1^{M+1} \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \ln(M+1) - \ln 1$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \ln(M+1) = +\infty .$$

Serie armonica generalizzata di esponente α

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Questa serie è convergente se $\alpha > 1$
divergente se $\alpha \leq 1$.

(curiosità: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, ...)

TEOREMA (CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DI UNA SERIE)

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. Allora:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ è convergente} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

(In particolare, se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l \neq 0$ o $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$, allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ non può essere convergente)

Def: Sia $\{a_n\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq n_0}}$ una successione. La serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ si dice:

1) A TERMINI NON NEGATIVI se $a_n \geq 0 \ \forall n \geq n_0$.
2) A TERMINI DEFINITIVAMENTE NON NEGATIVI se $\exists n_1 \in \mathbb{N}, n_1 \geq n_0$ t.c. $a_n \geq 0 \ \forall n \geq n_1$.
3) A TERMINI POSITIVI se $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$
4) A TERMINI DEFINITIVAMENTE POSITIVI se $\exists n_1 \in \mathbb{N}, n_1 \geq n_0$ t.c. $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_1$.

TEOREMA Una serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ a termini non negativi (o definitivamente non negativi) può essere solamente convergente o divergente positivamente.
(Non può essere indeterminata, né divergente a $-\infty$)

Questo teorema si può combinare con il precedente per per dimostrare che alcune serie sono divergenti.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2n^3+1}$$

$\frac{n^3}{2n^3+1} \geq 0$ quindi la serie è a termini non negativi.

Inoltre $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3}{2n^3+1} = \frac{1}{2} \neq 0$. Non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza quindi la serie non può essere convergente. Siccome è anche a termini non negativi è divergente a $+\infty$.

Criteri di convergenza per serie a termini non negativi (o positivi).

1) Criterio della radice n-esima.

Sia $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ una serie a termini (definitivamente) non negativi. Supponiamo che $\exists \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \geq 0$.

1) Se $L > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è divergente

2) Se $L < 1$, la serie è convergente.

(Attenzione: se $L = 1$ non si può concludere nulla)

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

La serie è a termini non negativi e

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{n}{2n+1} \xrightarrow{n\to+1} \frac{1}{2} < 1$$

per il criterio della radice n-esima, la serie converge.

2) Criterio del rapporto

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini (definitivamente) positivi. Se $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \geq 0$. Allora:

1) se $L > 1$ la serie diverge positivamente.
2) Se $L < 1$, la serie è convergente.

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

$$a_n = \frac{n}{3^n} > 0 \quad \forall n > 1.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \Big/ \frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{3} \to \frac{1}{3}.$$

$\frac{1}{3} < 1$ quindi, per il criterio del rapporto, la serie converge.

ESEMPIO 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n}$$

$a_n = \frac{n!}{4^n}$ quindi:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{4^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{4^n} = \frac{n+1}{4} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty > 1$$

la serie è divergente positivamente.

3) Criterio del confronto.

Siano $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ due serie. Supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$. Allora:

1) $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ è convergente $\Rightarrow$ $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è convergente.

2) $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ è divergente posit. $\Rightarrow$ $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ è divergente posit.

Sia $\{a_n\}_{n\geq 0}$ una successione di numeri naturali tra 0 e 9. Cioè $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Allora $a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots\dots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \text{ è sempre convergente.}$$

Infatti: $\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$ è convergente.

Per il criterio del confronto, anche $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ è convergente.

4) Criterio del confronto asintotico

Ricordiamo che:

$a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$ significa $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

(a_n e b_n sono ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTI)

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO)

Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi (o definitivamente positivi). Supponiamo che

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in]0, +\infty[$$

(cioè $a_n \sim L\, b_n$ per $n \to +\infty$).

Allora le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere (cioè sono entrambe convergenti o entrambe divergenti a $+\infty$).

ESEMPIO

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

$$\frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente, anche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ è divergente.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+e^n}$

$$\frac{1}{n+e^n} \sim \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Siccome la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ è convergente anche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+e^n}$ è convergente.